

УДК 517.972

ВАРИАЦИОННАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

© Н.И. Погодаев

Ключевые слова: вариационная устойчивость; оптимальное управление; уравнения в частных производных; Γ -сходимость.

Рассматривается задача оптимального управления (P_ε) для нелинейного функционально-операторного уравнения типа Вольтерра. Изучается зависимость значения задачи $\min(P_\varepsilon)$ и множества ее оптимальных решений $\operatorname{argmin}(P_\varepsilon)$ от параметра ε .

Пусть заданы топологическое пространство X , метрическое пространство M и семейство функций $F_\varepsilon: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $\varepsilon \in M$. Для каждого ε рассмотрим задачу минимизации

$$F_\varepsilon(x) \rightarrow \min, \quad x \in X. \quad (P_\varepsilon)$$

Будем считать, что все задачи из данного семейства имеют решения.

Мы скажем, что задача (P_ε) *вариационно устойчива* в точке ε_0 , если для любой последовательности $\varepsilon_h \rightarrow \varepsilon_0$

$$(i) \quad \min_X F_{\varepsilon_h} \rightarrow \min_X F_{\varepsilon_0},$$

$$(ii) \quad \text{если } x \text{ — точка сгущения последовательности } x_h \in \operatorname{argmin}_X F_{\varepsilon_h}, \text{ то } x \in \operatorname{argmin}_X F_{\varepsilon_0}.$$

Говоря неформально, задача (P_ε) вариационно устойчива в точке ε_0 , если малое изменение параметра ε_0 приводит к малому изменению значения задачи $\min_X F_{\varepsilon_0}$ и малому изменению множества минимизирующих элементов $\operatorname{argmin}_X F_{\varepsilon_0}$.

Понятие вариационной устойчивости очевидным образом переносится на задачи оптимального управления, зависящие от параметра. Действительно, любая такая задача может быть представлена в виде (P_ε) . Для этого достаточно положить

$$F_\varepsilon(u, z) = J_\varepsilon(u, z) + I_{\mathcal{R}_\varepsilon}(u, z),$$

где $J_\varepsilon: \mathcal{U} \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ — целевой функционал, $\mathcal{U}$ — множество управлений, $\mathcal{Z}$ — пространство состояний; $\mathcal{R}_\varepsilon$ — множество допустимых пар $(u, z) \in \mathcal{U} \times \mathcal{Z}$ (решений управляемой системы, зависящей от параметра ε),

$$I_{\mathcal{R}_\varepsilon}(u, z) = \begin{cases} 0, & (u, z) \in \mathcal{R}_\varepsilon, \\ +\infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Конкретизируем задачу оптимального управления. Пусть Ω — измеримое ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$. Множество управлений и пространство состояний выберем следующим образом: $\mathcal{U} = L^p(\Omega; \mathbb{R}^s)$ и $\mathcal{Z} = L^p(\Omega; \mathbb{R}^m)$, где $p \in [2, +\infty)$. Всюду в дальнейшем под задачей (P_ε) будем понимать следующую задачу:

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(u, z) &= \int_{\Omega} f_\varepsilon(t, A[z](t), u(t)) dt \rightarrow \min, \\ z(t) &= a_\varepsilon(t, A[z](t)) + b_\varepsilon(t, A[z](t))u(t), \quad t \in \Omega, \quad u \in \mathcal{U}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $f_\varepsilon: \Omega \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$, $a_\varepsilon: \Omega \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^m$, $b_\varepsilon: \Omega \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^s; \mathbb{R}^m)$, $\varepsilon \in M$, — заданные функции, $A: L^{p/2}(\Omega; \mathbb{R}^m) \rightarrow L^p(\Omega; \mathbb{R}^l)$ — компактный вольтерровый оператор. Здесь через $\mathcal{L}(\mathbb{R}^s; \mathbb{R}^m)$ обозначено пространство всех линейных операторов (матриц) из $\mathbb{R}^s$ в $\mathbb{R}^m$.

Вольтерровость оператора A означает, что существует положительный линейный ограниченный оператор $B: L^{p/2}(\Omega; \mathbb{R}) \rightarrow L^p(\Omega; \mathbb{R})$, мажорирующий A :

$$|A[z](t)| \leq B[|z|](t), \quad t \in \Omega, \quad z \in \mathcal{Z},$$

и обладающий для любого $\delta > 0$ вольтерровской δ -малой по мере цепочкой множеств. Напомним, что семейство всех измеримых по Лебегу множеств $H \subset \Omega$ такое, что для любого $y \in L^{p/2}(\Omega; \mathbb{R})$ сужение $B[y]|_H$ не зависит от значений $y(t)$ при $t \in \Omega \setminus H$, называют *системой вольтерровских множеств* оператора B . Систему множеств $\{H_i\}_{i=0}^k$ из этого семейства, для которой $\emptyset = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_k = \Omega$, называют *вольтерровской цепочкой* оператора B . Вольтерровская цепочка является δ -малой по мере, если $\mu_n(H_i \setminus H_{i-1}) < \delta$ для всех $i = 1, \dots, k$.

Решением управляемой системы (1) (при фиксированном h) назовем такую пару $(u, z) \in \mathcal{U} \times \mathcal{Z}$, для которой (1) выполняется при почти всех $t \in \Omega$.

Отметим, что к виду (1) сводится задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, а также ряд начально-краевых задач для уравнений в частных производных [1, 2].

При определенных и достаточно стандартных предположениях о функциях a_ε , b_ε , f_ε имеет место следующая теорема о вариационной устойчивости задачи (P_ε) .

Т е о р е м а. Для каждого $\varepsilon \in M$ задача (P_ε) имеет решение. Кроме того, пусть $\varepsilon_h \rightarrow \varepsilon_0$. Тогда $\min(P_{\varepsilon_h}) \rightarrow \min(P_{\varepsilon_0})$, при этом, если (u_h, z_h) — некоторое решение задачи (P_{ε_h}) , то последовательность $\{(u_h, z_h)\}_{h \in \mathbb{N}}$ имеет точку сгущения в пространстве в пространстве $\mathcal{U} \times \mathcal{Z}$, снабженном слабой топологией, и каждая такая точка сгущения (u_0, z_0) является решением задачи (P_{ε_0}) .

Доказательство теоремы основано на применении теории Γ -сходимости функционалов [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Сумин В.И. Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Часть I. Нижний Новгород: Издательство Нижегородского университета, 1992.
2. Чернов А.В. Об одном мажорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения // Известия вузов. Математика. 2011. Т. 55. № 3. С. 95-107.
3. Buttazzo G., Dal Maso G. Γ -convergence and optimal control problems // J. Optim. Theory Appl. 1982. N. 38. P. 385-407.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана грантом РФФИ № 13-01-00287-а и федеральной целевой программой «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», соглашение № 8211 от 06.08.2012.

Pogodaev N.I. VARIATIONAL STABILITY OF AN OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR AN OPERATOR EQUATION OF VOLTERRA TYPE

We consider an optimal control problem (P_ε) for a non-linear operator equation of Volterra type. The dependence of its value $\min(P_\varepsilon)$ and its set of minimizers $\operatorname{argmin}(P_\varepsilon)$ on the parameter ε is studied.

Key words: variational stability; optimal control; partial differential equations; Γ -convergence.